MA’RUZA

MATEMATIK STATISTIKANING IQTISODIY JARAYONLARNI TAHLIL QILISH VA BOSHQARISHDAGI O’RNI TANLANMA. POLIGON VA GISTOGRAMMA

Mavzuning rejasi

1. Tanlanma va uning berilish usullari. Poligon va gistogramma.
2.Nuqtaviy baholar va ularning hossalari: siljimaganlik, asoslilik va effektivlik.
3.Momentlar usuli
4.Haqiqatga eng yaqin baholash usuli.

Tayanch so’z va iboralar: tanlanma, takrorlanuvchi tanlanma, takrorlanmas tanlanma, matematik statistikaning birinchi masalasi, ikkinchi masala, uchinchi masala, to’rtinchi masala, beshinchi masala, empirik taqsimot funksiya, Glivenko-Kantelli teoremasi, variasion qator, variatsion qator, diskret variatsion qator, interval (uzluksiz) variasion qator, variasion qatorning poligoni, interval variasion qatorning gistogrammasi, o’rta qiymat arifmetik, o’rta qiymat, o’rta garmonik qiymat, o’rta geometrik qiymat, o’rta kvadratik qiymat.

Tanlanmaning ta’rifi va turlari

$x_1, x_2, ..., x_n$ bog’liqmas va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi **tanlanma** deyiladi. n -tanlanmaning xajmi.

Agarda tanlanma asosiy to’plamga qaytarilsa, uni **takrorlanuvchi tanlanma** deyiladi

Agar tanlanma asosiy to’plamga qaytarilmasa, uni **takrorlanmas tanlanma** deyiladi.

Matematik statistikaning masalalari

Odatda tanlanmaning taqsimot qonuni noma’lum bo’ladi. Biz bu noma’lum taqsimot qonunini $F(x)$ deb belgilaylik. Tanlanmaning noma’lum taqsimot qonuni $F(x)$ ni topish matematik statistikaning **birinchi masala**sidir.

Tajriba shuni ko’rsatadiki, tanlanma soni qanchalik katta bo’lmasin, noma’lum taqsimot qonuni $F(x)$ni aniq topish mumkin emas, shuning uchun noma’lum taqsimot qonuni tegishli bo’lgan sinf ma’lum deb qaralib, shu taqsimot qonunini noma’lum parametrini baholash masalasi qaraladi.

Misol. Agar tanlanma Puasson taqsimoti bo’yicha taqsimlangan bo’lsa, u holda $F(x,\theta) = \frac{\theta^k}{x!} e^{-\theta}, \qquad \theta - \textit{номаълум параметр}$. Noma’lum taqsimot qonunining parametrini topish masalasi, matematik statistikaning **ikkinchi masala**sidir.

Ayrim masalalarda noma’lum parametrning aniq qiymatini topish zarur bo’lmasdan shu parametr joylashgan birorta oraliqni ko’rsatish yetarli bo’ladi. Bunday oraliqlar ishonchlilik oralig’i deyiladi. Noma’lum parametrlar uchun ishonchlilik oralig’ini topish masalasi matematik statistikaning **uchinchi masala**sidir

Noma’lum taqsimot qonuni haqidagi har qanday gipoteza statistik gipoteza deyiladi. Statistik gipotezalarni tekshirish uchun kriteriylar qurish masalasi matematik statistikaning **to’rtinchi masala**sidir.

Odatda qaralayotgan bir necha tasodifiy miqdorlar o’rganilayotgan jarayonning turiga qarab, u yoki bu darajada bog’liq bo’lishi mumkin.

Masalan, X deb bir gektar yerga solinadigan mineral o’g’it miqdorini, Y deb shu gektar yerdan olinadigan hosil miqdorini belgilaylik, u holda bu ikki tasodifiy miqdor bog’liq ekanligi o’z-o’zidan ravshan.

Lekin bu bog’liqlikni funksional bog’lanish bo’lmaganligi uchun o’rganish qiyin bo’ladi. Bunday masalalarni faqatgina matematik statistika metodlari yordamida o’rganish mumkin.

Odatda ikki turli masalalar qaraladi:

1. Qaralayotgan ikki tasodifiy miqdor bog’liq yoki bog’liqmasligi;

2. Qaralayotgan ikki tasodifiy bog’liq bo’lsa, ularning birini ikkinchisi orqali qanday topish mumkin?

Ikki va undan ortiq tasodifiy miqdorlar orasidagi bog’liqlikni o’rganish matematik statistikaning **beshinchi masalasi**dir.

Empirik taqsimot qonuni

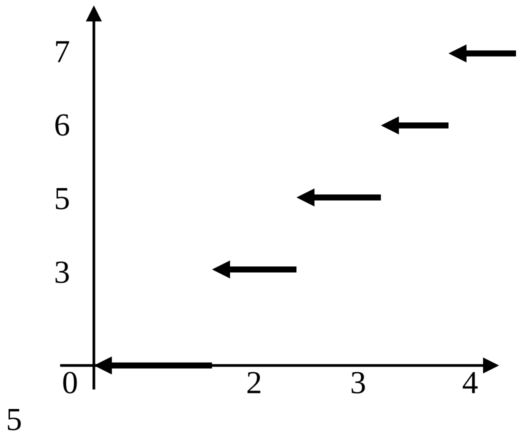
$x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanmaning taqsimot funksiyasi $F(x)$ noma’lum bo’lsin. Quyidagi funksiyani qaraymiz. $\mu_n(x) = \{x \ \text{дан кичик бўлган} \ x_i \ \text{лар сони}\}$

Misol. 2 2 2 3 3 4 5 tanlanmani qaraymiz.

$n = 7, \ x = 2,3,4,5,6$

$\mu_7(2) = 0, \ \mu_7(3) = 3, \ \mu_7(4) = 5, \ \mu_7(5) = 6, \ \mu_7(6) = 7$

$$\mu_7(X) = \begin{cases} 0, \ \text{агар} \ x \le 2 \\ 3, \ \text{агар} \ 2 < x \le 3 \\ 5, \ \text{агар} \ 3 < x \le 4 \\ 6, \ \text{агар} \ 4 < x \le 5 \\ 7, \ \text{агар} \ 5 > x \end{cases}$$

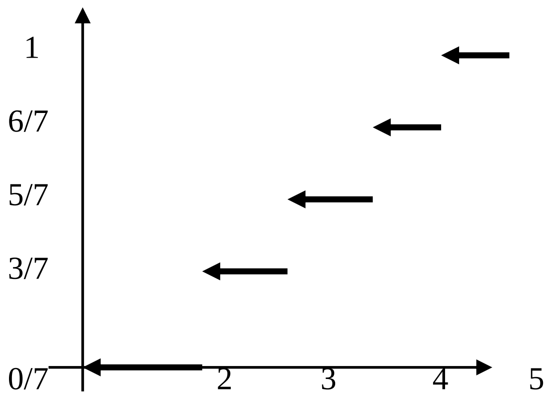


Tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi

Teorema. $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi $F_n(x)$ deb, $\frac{1}{n} \cdot \mu_n(x)$ ga aytiladi.

Misol. 2 2 2 3 3 4 5 tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini yozamiz.

$$F_7(X) = \begin{cases} 0, \ \text{агар} \ x \le 2 \\ \frac{3}{7}, \ \text{агар} \ 2 < x \le 3 \\ \frac{5}{7}, \ \text{агар} \ 3 < x \le 4 \\ \frac{6}{7}, \ \text{агар} \ 4 < x \le 5 \\ 1, \ \text{агар} \ 5 > x \end{cases}$$



Empirik taqsimot funksiyasining hossalari

1^0. $F_n(x)$ kamaymaydigan funksiya. 2^0. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_n(x) = 0$ 3^0. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) = 1$

4^0. $F_n(x)$ funksiya sanoqli sondagi uzilish nuqtasiga ega.

5^0. $F_n(x)$ funksiya 2-tur uzilishga ega.

6^0. $F_n(x)$ funksiya chapdan uzluksiz. $\left(\lim\limits_{x \to a-0} F(x) = F(a)\right)$.

(Glivenko-Kantelli) teoremasi

Har qanday tanlanmaning taqsimot funksiyasi $F(x)$ empirik funksiyani $F_n(x)$ deb belgilasak, u holda

$\lim\limits_{n \to \infty} P[F_n(x) \to F(x)] = 1$

Demak, n yetarlicha katta bo’lganda noma’lum taqsimot funksiya o’rniga uning empirik taqsimot funksiyasini olish mumkin ekan.

Variasion qator. O’rta qiymat va dispersiya

Variasion qator va uning turlari

<table>
<tr><td colspan="2">O’sib borish tartibida joylashgan $x_1, x_2, ..., x_n$ sonlar ketma-ketligi variasion qator deyiladi $(x_1 \le x_2 \le ... \le x_n)$.</td></tr>
<tr><td>Agar variasion qatorning elementlari chekli yoki sanoqli sondagi qiymatlarni qabul qilsa, bunday variasion qator diskret variasion qator deyiladi.</td><td>Variasion qator elementlarining qabul qiladigan qiymatlari biror oraliqni to’ldirsa, bu qator interval (uzluksiz) variasion qator deyiladi.</td></tr>
</table>

Yozilish formalari

1-usul. To’la ro’yxat usuli

Bunda variasion qatorning elementlari to’laligicha ketma-ket yoziladi.

Bunda variasion qatorning elementlari to’laligicha ketma-ket yoziladi. 2,2,2,3,3,4,4,4,4,5,5

2-usul. Jadval usuli

Bunda jadvalning birinchi qatoriga variasion qator elementlarining turli qiymatlari yoziladi. Ikkinchi qatorga esa, shu qiymatlarni necha martadan takrorlanishi qayd etiladi.

Misol. Imtixon natijasiga ko’ra talabalarning olgan baholari quyidagicha bo’lsin. 2,2,4,3,2,5,3,3,3,4,5 bu ketma-ketlikni jadval ko’rinishda yozamiz.

x_i	2	3	4	5
n_i	3	4	2	2

Interval variasion qator uchun jadval usul quyidagicha yoziladi.

$x_i - x_{i+1}$	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	...	$x_k - x_{k-1}$
n_i	n_1	n_2	...	n_{k-1}

3-usul. Grafik usul

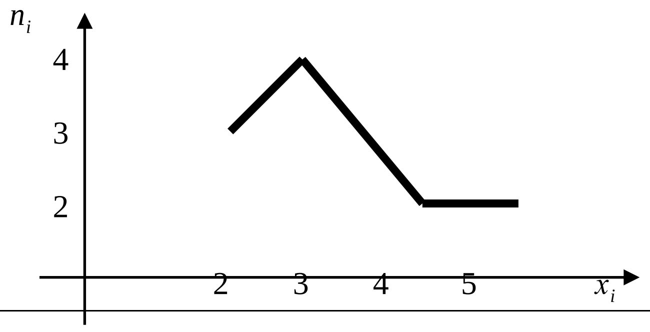
Diskret variasion qator uchun poligon, interval variasion qator uchun gistogramma

a)Diskret variasion qatorni qaraymiz.

Har qanday (x_i, n_i) juftlik dekart koordinatalar sistemasida yagona nuqtani aniqlaydi. Berilgan diskret variasion qator uchun (x_i, n_i) nuqtalarni belgilab, bu nuqtalar kesma yordamida ketma-ket birlashtiriladi. Hosil bo’lgan siniq chiziq diskret variasion qatorning **poligoni** deyiladi.

Misol.

x_i	2	3	4	5
n_i	3	4	2	2



b) Interval variasion qatorni qaraymiz.

Bunda har bir (x_i, x_{i+1}) oraliqqa yuzasi son jihatdan n_i ga teng bo'lgan to'g'rito'rtburchak yasaladi. Xos bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklar konfigurasiyasi interval variasion qatorning **gistogrammasi** deyiladi.

Misol.

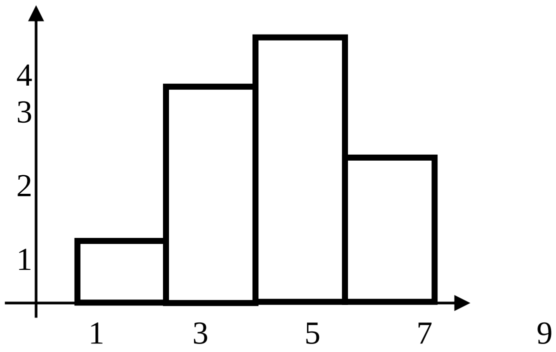
$x_i - x_{i+1}$	1-3	3-5	5-7	7-9
n_i	2	6	8	4

$a = 2,\ S = 2,\ b = 2/2 = 1$

$a = 2,\ S = 6,\ b = 6/2 = 3$

$a = 2,\ S = 8,\ b = 8/2 = 4$

$a = 2,\ S = 4,\ b = 4/2 = 2$



Variasion qatorning o'rta qiymatlari

1. O'rta arifmetik qiymat

$x_1, x_2, ..., x_n$ variasion qator berilgan bo'lsin.

Ta'rif. $x_1 \le a \le x_n$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday a soni variasion qatorning o'rta qiymati deyiladi.

$\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ sonni qaraylik. Bu son variasion qatorning o'rta qiymati ekanligini ko'ramiz.

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \ge \frac{x_1 + x_1 + ... + x_1}{n} = \frac{nx_1}{n} = x_1 \\ \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \ge \frac{x_n + x_n + ... + x_n}{n} = \frac{nx_n}{n} = x_n \end{aligned}\right| \Rightarrow \text{demak } \bar{x} \text{ variasion qatorning o'rta qiymati}$$

ekan. Bu o'rta qiymat **arifmetik** o'rta qiymat deyiladi.

Agar, variasion qator jadval usuli bilan berilgan bo'lsa, o'rta arifmetigi quyidagicha hisoblanadi.

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k}.$$

2. O'rta garmonik qiymat

Hadlari 0 ga teng bo'lmagan variasion qator uchun quyidagi sonni qaraymiz.

$$\bar{x} = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}}$$

bu kattalikning o'rta qiymat ekanligini ko'rsatish oson. Bu kattallikni **o'rta garmonik qiymat** deyiladi. Jadval usulida berilgan variasion qator uchun

$$\bar{x}_{-1} = \frac{n_1 + n_2 + ... + n_k}{\dfrac{n_1}{x_1} + \dfrac{n_2}{x_2} + ... + \dfrac{n_k}{x_k}}.$$

3. O'rta geometrik qiymat

Hadlari musbat sonlardan iborat variasion qatori uchun $\bar{x}_0 = \sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$ kattalikning o'rta qiymat ekanligi ravshan. Bu kattallik **o'rta geometrik qiymat** deyiladi. Jadval usulida berilgan variasion qator uchun

$$\bar{x}_0 = \sqrt[n_1 + n_2 + ... + n_k]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot ... \cdot x_n^{n_k}}$$

4. O’rta kvadratik qiymat

Ixtiyoriy variasion qator uchun

$$\bar{x}_2 = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 \cdot ... \cdot x_n^2}{n}}$$

Kattalik variasion qatorning o’rta qiymati bo’lib, **o’rta kvadratik qiymat** deyiladi. Jadval ko’rinishda berilgan variasion qator uchun

$$\bar{x}_2 = \sqrt{\frac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 \cdot ... \cdot n_k x_n^2}{n_1 + n_2 + ... + n_k}}.$$

Teorema

Musbat hadli har qanday variasion qator uchun $\bar{x}_{-1} \le \bar{x}_0 \le \bar{x} \le \bar{x}_2$ tengsizlik har doim bajariladi. $n = 2$ bo’lgan holda, $\bar{x}_0 \le \bar{x}$ ekanligini ko’rsatamiz.

Isboti.

$$\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \ge 0$$

$$x_1 - 2\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} + x_2 \ge 0$$

$$x_1 + x_2 \ge 2\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \ge \sqrt{x_1 x_2}$$

$$\bar{x} \ge \overline{x_0}$$

Ushbu tenglik faqat $x_1 = x_2$ bo’lganda o’rinli.

O’rta arifmetik qiymatning xossalari

1. Bir xil sondan iborat variasion qatorning o’rta arifmetigi shu songa teng. $\bar{C} = C$
2. Agar variasion qatorning har bir hadiga o’zgarmas son qo’shilsa o’rta arifmetik ham shu songa ortadi. $\overline{x + a} = \bar{x} + a$
3. Agar variasion qator hadlarini bir xil songa ko’paytirsak, o’rta arifmetik ham shu songa kupayadi. $\overline{kx} = k\bar{x}$
4. O’rta arifmetik qiymatni sodda xisoblash funksiyasi. $\left(\frac{\overline{x + a}}{k}\right) = \frac{\bar{x} + a}{k}$

Variasion qatorning dispersiyasi

Ta’rif. Ixtiyoriy $x_1, x_2, ..., x_n$ variasion qatorning dispersiyasi deb,

$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ ga aytiladi.

Teorema

Teorema. $S_a^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$ ifodaning eng kichik qiymati $a = \bar{x}$ bo’lganda erishiladi.

Isboti.

$$S_a^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}+\overline{x}-a)^2=\frac{1}{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(\overline{x}-a)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-a)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2\right]=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+0+\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 \quad агар \quad \overline{x}=a$$

Dispersiyani xisoblashning ikkinchi formulasi

$$S_x^2=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}2x_i\overline{x}+\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{2}{n}\overline{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{n}n\cdot\overline{x}^2==\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\left(\overline{x}\right)^2+\left(\overline{x}\right)^2=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\overline{x}\right)^2=\left(\overline{x_2}\right)^2-\left(\overline{x}\right)^2$$

Dispersiyaning xossalari.

1.Bir xil sondan tashkil topgan variasion qatorning dispersiyasi 0 ga teng. $S_c^2=0$

2.Agar variasion qatorning hadlariga bir xil son qo'shilsa, dispersiya o'zgarmaydi. $S_{x+a}^2=S_x^2$

3.Agar variasion qatorning hadlariga bir xil son ko'paytirilsa, dispersiya shu sonning kvadratiga ko'payadi. $S_{kx}^2=k^2S_x^2$

4. Dispersiyani xisoblashning sodda formulasi. $S_{\frac{x+a}{k}}^2=\frac{1}{k^2}S_x^2$